

$$U_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{h}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$K_{ijk} = \frac{e_{ijk}}{\sqrt{c_{2323}\varepsilon_{11}}}, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 3},$$
(10)

потенциал, модули упругости, плотность:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{\varepsilon_{11}}\Phi(x_1, x_2, x_3)}{h}, \quad i = \overline{1, 3}$$

$$A_{ijkl} = \frac{c_{ijkl}}{c_{2323}}, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 3}, l = \overline{1, 3},$$
(11)

$$\rho_0 = \rho \frac{c_2^2}{c_{2323}}$$

диэлектрические проницаемости:

$$s_{22} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad s_{33} = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}.$$
(12)

где h – это толщина пластинки, а c_2 – это величина, имеющая размерность скорости.

Литература

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах/ Э. Дьелесан, Д. Руайе – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах/ И.А. Викторов – М.:Наука, 1981. – 287 с.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А.С.Циунчик

Нелинейные уравнения Шредингера широко используются для описания нелинейных волновых процессов различной физической природы [1,2]. В большинстве практически значимых случаев аналитическое решение подобных задач найти не удастся, и их исчерпывающий анализ требует применения приближенных численных методов.

Для исследования эффективности численных алгоритмов традиционно используется модельная задача для уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ):

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 x} + 2|E|^2 E = 0, \quad x = (-L, L), \quad (1)$$

$$E(0, x) = E_0(x), \quad E(t, -L) = E(t, L) = 0. \quad (2)$$

Задача (1-2) имеет двухпараметрическое семейство автомодельных решений вида уединенных волн – солитонов [1,2]:

$$E(x, t) = A \operatorname{sech}\{A(x - vt)\} \exp\{i[vx - (v^2 - A^2)t]\}, \quad (3)$$

где действительные постоянные A и v – амплитуда и скорость солитона.

Наиболее эффективными для данного класса задач являются симметричные консервативные разностные методы и метод дробных шагов (МДШ) с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ) [3]. Симметричная схема дробных шагов второго порядка точности по τ сводится к последовательности следующих операций [1]:

$$u(t + \tau/2, x) = u(t, x) \exp(i\tau |u(t, x)|^2), \quad U(t + \tau/2, \omega) = F[u(t + \tau/2, x)],$$

$$U(t + \tau, \omega) = U(t + \tau/2, \omega) H(\omega), \quad \bar{u}(t + \tau, x) = F^{-1}[U(t + \tau, \omega)],$$

$$u(t + \tau, x) = \bar{u}(t + \tau, x) \exp(i\tau |\bar{u}(t + \tau, x)|^2),$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, $x_k = -L + kh$, $h = 2L/N$, $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1})$, $\omega_k = (-N/2 + k) \frac{\pi}{L}$, $k = \overline{0, N-1}$, $H(\omega) = \exp\{-i\tau\omega^2\}$, $U = F[u]$ и $u = F^{-1}[U]$

– соответственно прямое и обратное дискретное преобразование Фурье.

Использование преобразования Фурье обеспечивает высокую точность метода, однако вычислительная сложность алгоритма имеет порядок $O(N \log_2 N)$. В работе [4] предложена модификация МДШ, в которой приближенное решение линейной части задачи вычисляется с помощью цифрового фильтра второго порядка с функцией передачи

$$H_{Lin}(\omega) = p_i p_r (e^{-i\omega} - ip_i^{-1}) (e^{-i\omega} - p_r^{-1}) (e^{-i\omega} - ip_i)^{-1} (e^{-i\omega} - p_r)^{-1}.$$

Действительные постоянные p_i и p_r задаются с таким расчетом, чтобы обеспечить наилучшую согласованность характеристик $H_{Lin}(\omega)$ и $H(\omega)$. Стандартная реализация данного цифрового фильтра на основе рекурсивного алгоритма осуществляется без перехода в частотную область [5], что обеспечивает оптимальную вычислительную сложность метода порядка $O(N)$.

Недостатком данного метода является вносимая цифровым фильтром постоянная групповая задержка приближенного решения, которая выражается в пространственном сдвиге приближенного решения на каждом шаге по времени [4].

Рассмотрим в качестве метода решения линейной части уравнения (1) цифровой фильтр с функцией передачи

$$H_S(\omega) = H_1(\omega)H_1^*(\omega) = p^2(e^{-i\omega} - ip^{-1})(e^{-i\omega} - ip)^{-1}(e^{i\omega} - p^{-1})(e^{i\omega} - p)^{-1}.$$

Использование данного цифрового фильтра в симметричной схеме дробных шагов приводит к следующему алгоритму:

$$\bar{u}(t_n + \tau/2, x_k) = pu(t_n, x_k) - iu(t_n, x_{k-1}) + ip\bar{u}(t_n + \tau/2, x_{k-1}), \quad (4a)$$

$$k = \overline{1, N-1}, \quad \bar{u}(t_n + \tau/2, x_0) = u(t_n, x_0) = 0,$$

$$\bar{u}(t_n + \tau, x_n) = \bar{u}(t_n + \tau/2, x_k) \exp\{i\tau 2|\bar{u}(t_n + \tau/2, x_k)|^2\}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (4б)$$

$$u(t_n + \tau, x_k) = p\bar{u}(t_n + \tau, x_k) - i\bar{u}(t_n + \tau, x_{k+1}) + ipu(t_n + \tau, x_{k+1}), \quad (4в)$$

$$k = N-2, N-3, \dots, 0, \quad u(t_n + \tau, x_{N-1}) = \bar{u}(t_n + \tau, x_{N-1}) = 0.$$

Шаг по времени τ связан с шагом дискретизации по пространству h и выбором действительной постоянной p : $\tau = 2h^2 p(1 - p^2)(1 + p^2)^{-2}$.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при любых p

$$|H_{Lin}(\omega)| = |H_S(\omega)| = |H(\omega)| = 1.$$

Следствием этого является консервативность данных алгоритмов

$$\text{мов: } \sum_{k=0}^{N-1} h |u(t_n, x_k)|^2 = \text{const}.$$

По сравнению с цифровым фильтром $H_{Lin}(\omega)$, пара сопряженных фильтров первого порядка $H_1(\omega)$ и $H_1^*(\omega)$ позволяет сократить вычислительные затраты, устранить эффект группового запаздывания приближенного решения и

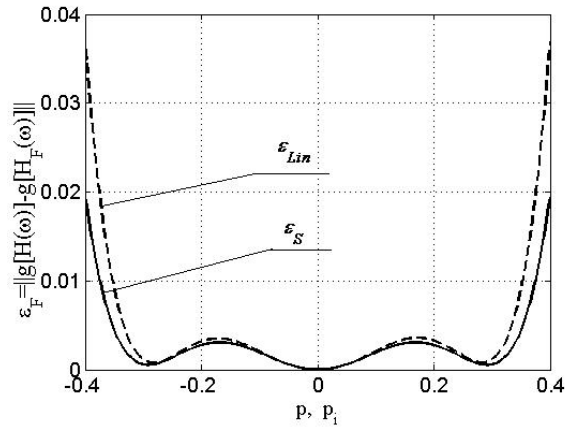


Рис.1. Зависимости от параметров p и p_1 погрешности аппроксимации функции групповой задержки дифференциальной задачи при использовании цифровых фильтров H_{Lin} и H_S

существенно улучшить согласованность результирующей функции передачи фильтра $H_S(\omega)$ с методом Фурье.

Погрешности аппроксимации фазовых характеристик дифференциальной задачи в терминах групповой задержки $g[H(\omega)] = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(\omega)\}$ при использовании рассмотренных цифровых фильтров $H_{Lin}(\omega)$ и $H_S(\omega)$ представлены на рис.1. Из рисунка видно, что дисперсионная погрешность предложенного цифрового фильтра $H_S(\omega)$ заметно ниже, чем для $H_{Lin}(\omega)$.

Фазово-частотные характеристики и фактические погрешности приближенного решения при моделировании динамики солитонов (3), $A=2$, $\nu=0$, с использованием различных численных методов представлены на рис.2. Несложно заметить, что предложенный алгоритм (4) имеет второй порядок точности относительно шага дискретизации h . Фактическая погрешность данного метода на порядок меньше, чем у консервативных разностных схем, и примерно во столько же раз больше по сравнению с методом Фурье.

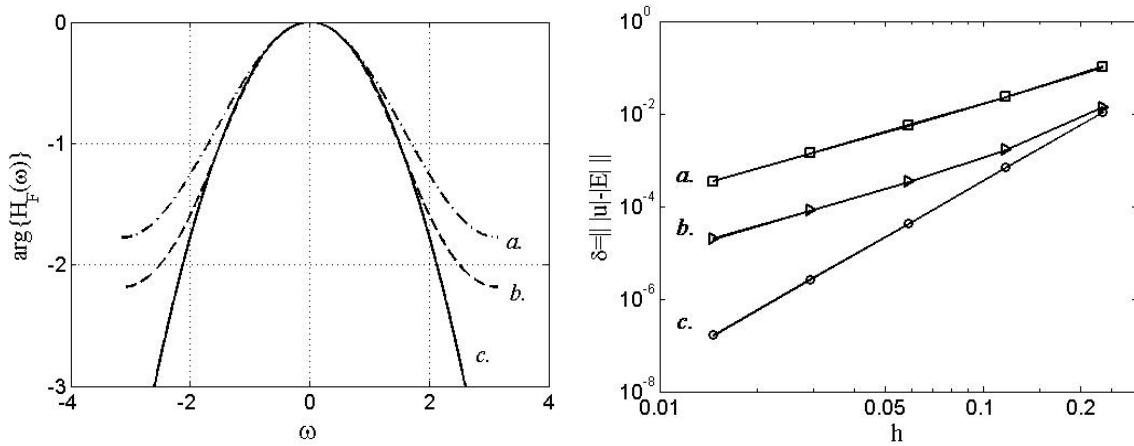


Рис.2. Фазово-частотные характеристики (слева) и фактическая погрешность (справа) численных методов: *a* – консервативный разностный метод, *b* – МДШ с использованием цифрового фильтра H_S , *c* – МДШ с использованием БДПФ.

Таким образом, предложенная модификация МДШ (4) обеспечивает существенное сокращение вычислительных затрат при умеренном снижении точности по сравнению методами, основанными на использова-

нии БДПФ. По качественным характеристикам предложенный метод превосходит известный аналог [4].

Литература

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 323 с.
2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
3. *Taha R. T., Ablowitz M. J.* Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical nonlinear Schrodinger equation // J. Comp. Phys. – 1984. – V. 55, № 2. – P. 203 – 230.
4. *Carena A, Curri V., Gaudino R., Poggiolini P., and Benedetto S.* A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. -1997. V. 15. P 751 – 765.
5. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.